數 學 增 潤 篇

最大的射門角度

設有一個長為 110 m ，闊為 60 m 的足球場，在底線上的龍門的闊為 7.3 m ，如圖 4.264 所示。一個足球員沿一條平行於邊線及與邊線相距 5 m 的直線運球。假設該球員可在這直線上選擇任何一點射球，我們怎樣找出一個最佳的射門距離 x m （由底線至射門的點計），使得該球員可以有一個最大的射門角度 θ 射球，以增大入球的機會？即求 x 的最優值，使得 θ 為最大？

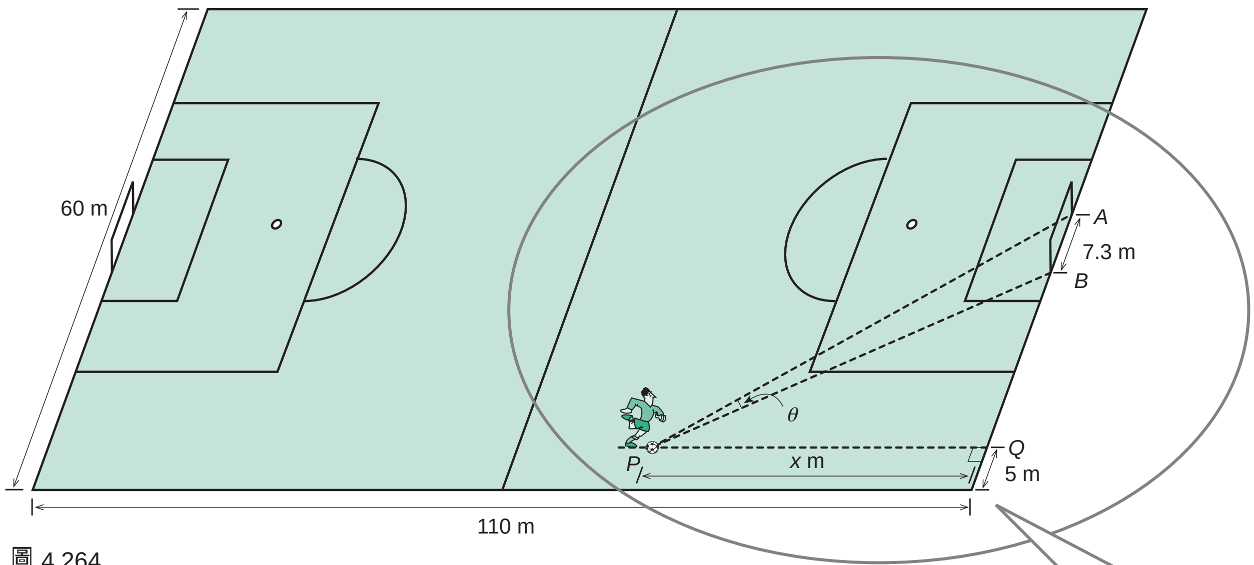

圖 4.264

我們可以利用幾何的概念來解答以上的問題。

如圖 4.265 所示，畫一個穿過點 A 及 B 的圓形，並與直線 PQ 相切。則 P_1 就是圓形與直線相切的點，亦是能給足球員最大射門角度的位置。

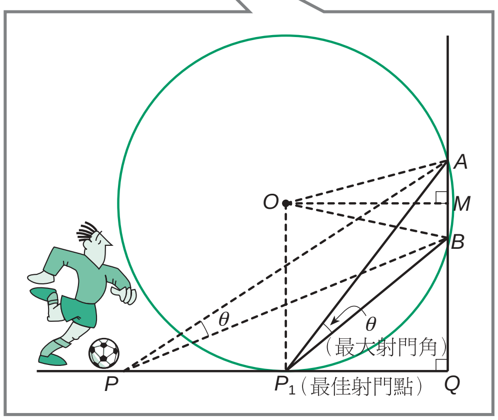

圖 4.265

在圖 4.266 中，若 $AQ = p$，$BQ = q$ 及 $P_1Q = x$，則 x 可以 p 及 q 表示。現在設 O 為圓心及 M 為 AB 的中點。

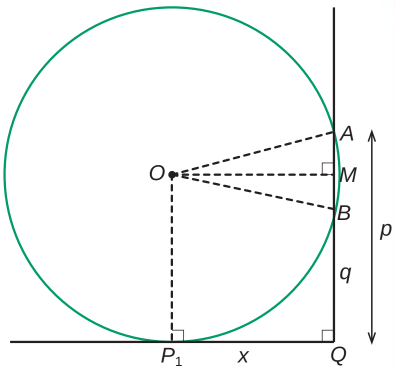

圖 4.266

$$
\begin{aligned}
x &= OM \\
&= \sqrt{OA^2 - AM^2} && \text{(畢氏定理)} \\
&= \sqrt{(OP_1)^2 - AM^2} && (OA \text{ 及 } OP_1 \text{ 為圓的半徑}) \\
&= \sqrt{MQ^2 - AM^2} \\
&= \sqrt{\left(q + \frac{p-q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2} \\
&= \underline{\underline{\sqrt{pq}}}
\end{aligned}
$$

想一想

1. 根據以上所給的數據，求 x。

2. 若該足球員沿着邊線運球，求射門的最佳距離。